Fluidos

Introdução

Segundo a concepção clássica, pode-se classificar qualquer tipo de matéria em um de três estados básicos: *sólido*, *líquido* e *gasoso*. Atualmente, costuma-se acrescentar a esses três estados mais dois: *plasma* e *condensado de Bose-Einstein*.

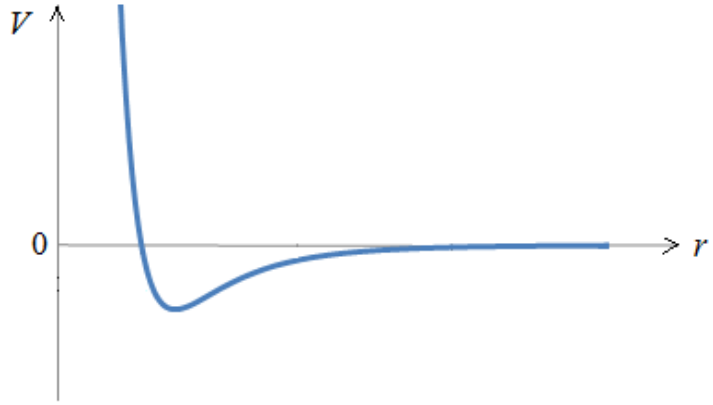
Também se pode dizer que há muitos tipos de matéria que estão em um estado *intermediário* entre líquido e sólido – o nome usado atualmente para designar esses tipos de matéria é *matéria mole* –, de maneira que haveria de fato um *continuum* de estados entre o estado sólido e o estado líquido.

Neste curso, vamos deixar de lado essas questões, pois elas pertencem à fronteira da física e para chegar a estudá-las (e entendê-las) vocês precisam passar primeiro pelo estudo das propriedades básicas dos três estados clássicos: sólido, líquido e gasoso. É deles, mais particularmente dos líquidos e gases, que trataremos aqui.

O que diferencia cada um desses três estados básicos?

Desprezando a interação gravitacional, que afeta todos os corpos, as propriedades de um corpo são determinadas pelas interações entre as moléculas que o constituem, que são de natureza eletromagnética.

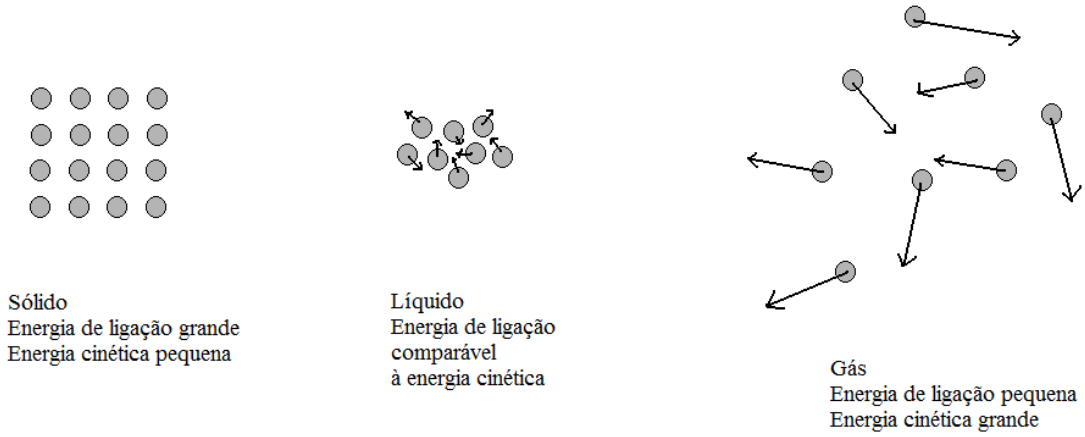
De maneira geral, as forças intermoleculares em qualquer material são do tipo forças de van der Waals[1]: fortemente repulsivas quando as moléculas se aproximam tanto a ponto de entrar em contato e moderadamente atrativas quando elas estão separadas por uma pequena distância, mas desaparecendo a distâncias maiores[2] (a figura abaixo mostra o esboço da energia potencial V entre duas moléculas em função da distância r entre elas).



Note que esse potencial possui um mínimo a certa distância de separação entre as duas moléculas. A energia associada a esse mínimo (a profundidade do mínimo, medida a partir da origem) é a chamada *energia de ligação* da molécula.

[1] Nome dado em homenagem ao físico holandês Johannes Diederik van der Waals (1837-1923), ganhador do Prêmio Nobel de Física de 1910 por seus trabalhos sobre fluidos.
[2] Na realidade, a descrição mais adequada das forças intermoleculares só é feita pela Mecânica Quântica, que está além dos objetivos deste curso.

O estado da matéria (sólido, líquido ou gasoso) depende, *grosso modo*, da relação entre essa energia de ligação e a energia cinética média das moléculas devida ao seu movimento térmico (veja a figura abaixo).



Em um sólido, o mínimo da energia potencial é tão profundo que o movimento térmico não consegue superá-lo. Os átomos e moléculas do material ficam então fortemente presos em torno do ponto de mínimo (ou de equilíbrio), fazendo apenas movimentos oscilatórios de pequena amplitude (como em um MHS) em torno desse ponto.

Essa situação só é alterada quando a temperatura é tão alta a ponto de elevar a energia das moléculas bem acima do mínimo de energia potencial, o que provoca o derretimento do sólido. Em um sólido, portanto, as moléculas estão ligadas de maneira rígida. Por causa disso, um sólido tem forma e volume bem definidos.

Quando forças externas são aplicadas a um sólido, ele pode se deformar elasticamente. Se as forças forem muito grandes, o sólido pode tornar-se maleável ou mesmo fraturar. A maior parte do trabalho feito pelas forças externas que deformam um sólido antes de fraturá-lo pode ser recuperada como trabalho quando as forças cessam.

Em líquidos e gases o mínimo de energia potencial não é tão profundo e o movimento térmico das moléculas é capaz de superar as forças atrativas entre elas.

No caso dos líquidos, as forças atrativas ainda têm algum efeito e conglomerados moleculares podem ser formados. A consequência disso é que as moléculas que constituem um líquido não estão ligadas de maneira tão forte para manter uma forma definida – um líquido adapta a sua forma à do recipiente que o contém –, mas as forças entre elas são suficientes para preservar seu volume.

Já no caso dos gases as forças atrativas são tão fracas que, efetivamente, as moléculas movem-se como partículas livres entre colisões. Portanto, um gás não tem nem forma e nem volume definidos. Ele se expande no interior do recipiente onde está até preencher todo o seu volume.

A aplicação de forças externas sobre líquidos e gases faz com que eles *fluam* e, por isso, eles são chamados de *fluidos*. Parte do trabalho feito por essas forças externas é dissipado como calor (movimento molecular aleatório) e não pode ser recuperada como trabalho depois que as forças acabam.

Os fluidos obedecem às mesmas leis físicas que os sólidos, mas a sua característica fluídica faz com certos fenômenos não observados em sólidos ocorram nos fluidos. São esses fenômenos que serão estudados nesta aula e na próxima.

Antes de começar, vamos fazer mais um comentário introdutório. Ele diz respeito à escala com a qual vamos "olhar" para os fluidos. Embora saibamos que os líquidos e gases são feitos de moléculas separadas umas das outras, vamos estudá-los aqui como se eles fossem *meios contínuos*.

A chamada *física dos meios contínuos* procura descrever e estudar a matéria usando escalas de tamanho muito grandes em comparação com as escalas típicas dos tamanhos moleculares. Em geral, essas grandes escalas de tamanho são as escalas da nossa própria experiência com o mundo material.

Isto serve como possível argumento qualitativo para justificar o uso da aproximação contínua. Como a nossa percepção dos objetos materiais como *contínuos* funciona muito bem para a maior parte das nossas aplicações cotidianas (em mecânica, engenharia, artes, etc), uma descrição física em termos de meios contínuos também deve ser igualmente eficaz.

De um ponto de vista mais quantitativo, se as flutuações nas quantidades físicas de interesse, como densidade e pressão, causadas pela natureza discreta da matéria forem menores do que a precisão desejada, então a aproximação contínua é justificada.

Sabemos que as escalas macroscópicas usadas pela aproximação contínua são gigantescas em comparação com a escala das distâncias moleculares.

Em um pequeno volume de qualquer material (pequeno do ponto de vista macroscópico) a quantidade de moléculas é tão grande que todas as flutuações estatísticas aleatórias se cancelam para qualquer nível de precisão de interesse prático desejado. Apenas grandezas *médias*, que se comportam como variáveis contínuas em escalas macroscópicas, são relevantes.

A seguir, faremos algumas estimativas numéricas para encontrar escalas adequadas ao tratamento contínuo. Elas não são necessárias para o entendimento do resto do curso e podem ser puladas sem perda de continuidade (ou seja, pode-se ir diretamente para a página 13 sem prejuízo da leitura deste texto).

Seja uma substância de densidade ρ e massa molar M_{mol}. Um mol dessa substância ocupa um volume M_{mol}/ρ, de maneira que o volume por molécula é $M_{\text{mol}}/\rho N_A$, onde N_A é o número de Avogadro[3]. Um cubo com esse volume teria lados de comprimento

$$L_{\text{m}} = \left(\frac{M_{\text{mol}}}{\rho N_A} \right)^{1/3} , \qquad (1)$$

que pode ser tomado como a escala das separações moleculares.

Para o ferro temos $L_{\text{m}} \approx 0{,}24$ nm, para a água $L_{\text{m}} \approx 0{,}31$ nm e para o ar a condições normais de temperatura e pressão $L_{\text{m}} \approx 3{,}4$ nm.

Suponhamos que queremos determinar a densidade de um material com certa precisão relativa ε, digamos $\varepsilon = 1\%$. Ou seja, queremos que $\Delta\rho/\rho = 0{,}01$.

[3] O número de Avogadro dá o número de moléculas em um mol de substância. Ele vale $N_A = 6{,}022137 \times 10^{23}$ moléculas/mol.

Para isso, vamos tomar um volume V do material e contar o número N de moléculas de massa m no seu interior. A densidade será então dada por

$$\rho = \frac{mN}{V} \,. \tag{2}$$

Devido ao movimento aleatório das moléculas do fluido, o número N sofre flutuações e mediremos um valor diferente de N a cada nova medida. Vamos chamar de ΔN o tamanho típico da flutuação nas medidas de N. Por causa de (2), podemos relacionar a flutuação relativa de N com a flutuação relativa de ρ

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta N}{N} \,. \tag{3}$$

Se quisermos que a flutuação relativa da densidade seja, no máximo, igual a ε, então devemos ter $\Delta N \leq \varepsilon N$.

Para estimar ΔN, vamos usar um modelo *estatístico*.

Vamos supor que o intervalo de tempo entre cada medida de N é muito grande em comparação com o tempo característico entre colisões moleculares. Com isso, podemos supor que a cada nova medida de N todas as N moléculas que estavam no volume V no tempo anterior foram substituídas (com reposição) por N novas moléculas tiradas de um conjunto de $M > N$ moléculas.

O número M corresponde ao total de moléculas num volume bem maior que V e que inclui V.

Considerando que a probabilidade de encontrar uma molécula no volume V é p, podemos escrever a probabilidade de encontrar N moléculas no volume V pelo processo acima usando a fórmula da distribuição binomial de probabilidades (lembre-se das aulas de estatística)

$$P(N \mid M, p) = \binom{M}{N} p^N (1-p)^{M-N} = \frac{M!}{N!(M-N)!} p^N (1-p)^{M-N} . \quad (4)$$

Lembrando um pouco mais das aulas de estatística (ou consultando o capítulo sobre distribuições de probabilidade discretas de um livro de estatística), temos que a média e a variância da distribuição binomial acima são iguais, respectivamente, a

$$\overline{N} = pM \quad \text{e} \quad \sigma^2 = p(1-p)M . \quad (5)$$

Vamos usar a raiz quadrada da variância acima (isto é, o desvio padrão de N) como estimativa da flutuação ΔN,

$$\Delta N \approx \sqrt{p(1-p)M} . \quad (6)$$

Supondo que $p << 1$, podemos escrever

$$\Delta N = \sqrt{pM} = \sqrt{\overline{N}} = \sqrt{N} , \quad (7)$$

pois $\overline{N} = N$. Portanto, a condição para que a flutuação relativa seja no máximo ε é

$$\Delta N \leq \varepsilon N \Rightarrow \sqrt{N} \leq \varepsilon N \Rightarrow N \geq \frac{1}{\varepsilon^2} . \qquad (8)$$

Podemos então definir $N_{\text{micro}} \equiv \varepsilon^{-2}$ como o menor número de moléculas num volume V_{micro} capaz de permitir a aproximação contínua com precisão relativa ε. O sub-índice "micro" foi usado porque este número define o limiar de transição entre a possibilidade da abordagem contínua (macroscópica) e a abordagem discreta (microscópica). Para $\varepsilon = 0{,}01$, este número é

$$N_{\text{micro}} = 10^4 \text{ moléculas} . \qquad (9)$$

Este é um número bastante grande. Como o volume ocupado por uma molécula é L_m^3, o volume V_{micro} ocupado por N_{micro} moléculas é

$$V_{\text{micro}} = N_{\text{micro}} L_m^3 \Rightarrow L_{\text{micro}}^3 = N_{\text{micro}} L_m^3 ,$$

ou

$$L_{\text{micro}} = N_{\text{micro}}^{1/3} L_m = \varepsilon^{-2/3} L_m . \qquad (10)$$

O menor volume cúbico para o qual a aproximação contínua ainda seria válida com precisão de $\varepsilon = 1\%$ tem lado $L_{\text{micro}} = 21{,}5 L_m$.

Para o ferro esse lado seria $L_{\text{micro}} \approx 5{,}2$ nm, para a água $L_{\text{micro}} \approx 7{,}0$ nm e para o ar a condições normais de temperatura e pressão $L_{\text{m}} \approx 73$ nm. Estes números são muito pequenos.

De maneira geral, para gases a aproximação contínua funciona bem até escalas da ordem de 100 nm e, para sólidos e líquidos, ela funciona bem até escalas uma ordem de grandeza menor (~10 nm).

Outro conceito importante para a definição do limiar a partir do qual a aproximação contínua é justificável é o de *livre caminho médio*. O livre caminho médio λ de uma molécula pode ser definido como a distância média que uma molécula percorre entre colisões sucessivas com outras moléculas.

Para o ar, a condições normais de temperatura e pressão, $\lambda \cong 94$ nm. Para sólidos e líquidos este valor é ainda menor, da ordem de 1 nm.

Uma maneira alternativa de estimar L_{micro} é considerar que $\lambda/L_{\text{micro}} = 1$ define a menor escala para a qual a aproximação contínua é válida. Temos então, novamente, para gases um valor de $L_{\text{micro}} \approx 100$ nm e para líquidos e sólidos um valor de L_{micro} ainda menor do que o da estimativa anterior.

Estas estimativas numéricas são suficientes para garantir que trabalhando em escalas de até aproximadamente 0,1 μm podemos usar confortavelmente a aproximação contínua.

Quando for preciso trabalhar usando escalas abaixo desse valor, a aproximação contínua não pode mais ser adotada. Em tais casos deve-se usar modelos microscópicos discretos baseados em teorias físicas conhecidas como mecânica estatística, mecânica quântica ou teoria cinética da matéria.

É por isso que a nanofísica é tão importante e estimulante nos dias atuais: o fato de que tecnologicamente estamos podendo trabalhar com materiais em escala nanométrica obriga os físicos a desenvolver modelos microscópicos discretos que nada tem a ver com os modelos contínuos tradicionais. Isso está levando a física a aplicar suas teorias em territórios ainda não explorados e sempre que isso acontece há a promessa de que novos fenômenos físicos sejam descobertos.

Como o título de uma palestra proferida pelo físico norte-americano Richard Feynman (1918-1988) em 1959 – hoje tida como uma das precursoras da nanociência – sugere: *There's plenty of room at the bottom*. Veja uma reprodução dessa palestra em http://www.zyvex.com/nanotech/feynman.html.

Não estamos interessados em nanofísica e em teorias microscópicos neste curso, portanto não vamos considerá-las aqui.

Nosso objetivo, daqui por diante, será estudar a mecânica dos fluidos tratando-os como meios contínuos. Vamos começar por fluidos em repouso.

Estática dos fluidos

As forças que atuam sobre uma porção de um meio contínuo podem ser classificadas em *forças volumétricas* e *forças superficiais*.

As forças volumétricas são forças de longo alcance, como a força gravitacional, que atuam sobre todos os pontos do meio. Por causa disso, a força volumétrica total atuando sobre um elemento de volume ΔV do meio é proporcional a ΔV.

Por exemplo, supondo que o elemento de volume tem massa Δm a força gravitacional atuando sobre o elemento é

$$\Delta\vec{F} = \Delta m\vec{g} = \rho\Delta V\vec{g}\ , \qquad (11)$$

onde ρ é a densidade do meio e $\vec{g}$ é a aceleração da gravidade.

A expressão acima pode ser reescrita como

$$\Delta\vec{F} = \vec{f}_g\Delta V\ , \qquad (12)$$

onde $\vec{f}_g$ é a chamada *densidade de força gravitacional*:

$$\vec{f}_g = \rho\vec{g} \ . \qquad (13)$$

Para qualquer outra força volumétrica atuando sobre o fluido se pode definir uma densidade de força $\vec{f}$ correspondente.

As forças superficiais são forças de curto alcance, como as forças intermoleculares, entre porções vizinhas do meio. As forças superficiais recebem este nome porque são transmitidas através das superfícies de contato entre diferentes regiões do meio e, por causa disso, elas também são chamadas de *forças de contato*.

Dado um elemento de área ΔS do fluido ou do recipiente que o contém, o número de moléculas que está em contato direto com esse elemento de área é tanto maior quanto maior for ΔS. Por causa disso, a força de superfície sobre um elemento de superfície de área ΔS é proporcional a ΔS.

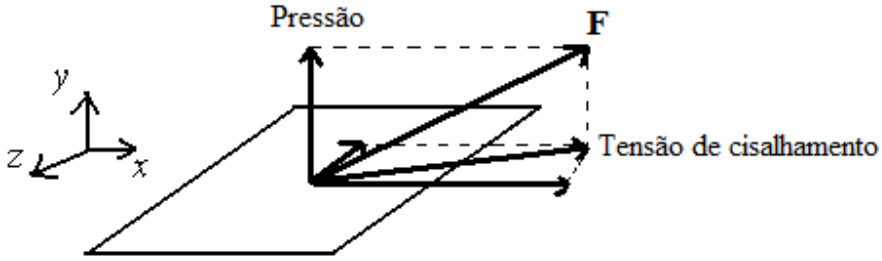
A força de superfície por unidade de área é chamada genericamente de *tensão*.

Para que um fluido esteja em equilíbrio mecânico, ou *equilíbrio hidrostático*, é necessário que as resultantes das forças volumétricas e superficiais que atuam sobre todos os seus pontos se anulem.

Pressão

Uma força superficial atuando sobre um pequeno elemento de área do meio é um vetor que pode ter qualquer orientação em relação a normal à área, mas que sempre pode ser separado em uma componente normal e em uma componente tangencial à área.

A componente normal é chamada de *pressão* e a componente tangencial é chamada de *tensão de cisalhamento* (veja a figura abaixo).



A tensão de cisalhamento ainda pode ser decomposta em duas componentes dadas por suas projeções ao longo de dois eixos ortogonais paralelos à superfície (veja a figura acima).

Tanto a pressão como a tensão de cisalhamento são medidas em unidades de força por unidade de área. A unidade de pressão e de tensão no Sistema Internacional é o pascal (Pa), em homenagem ao filósofo, físico e matemático francês Blaise Pascal (1623-1662), que foi um dos pioneiros do estudo de fluidos.

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2.$$

Outras unidades comumente encontradas são o bar, a atm e o torr (ou milímetros de mercúrio, mm Hg):

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa};$$

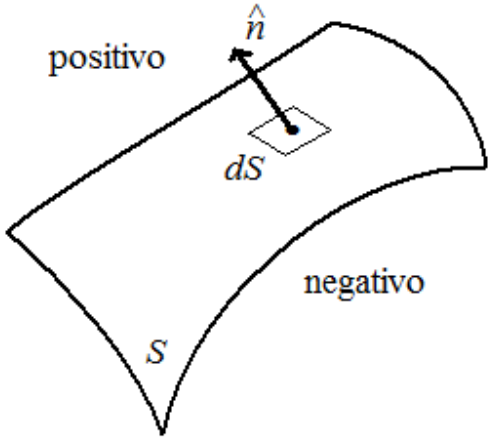
$$1 \text{ atm} = 1{,}013 \times 10^5 \text{ Pa};$$

$$1 \text{ torr} = 1 \text{ mm Hg} = 1{,}33 \times 10^2 \text{ Pa}.$$

A diferença fundamental entre sólidos e fluidos está na sua maneira de responder a tensões de cisalhamento. Quando uma superfície de um sólido é submetida à ação de uma tensão de cisalhamento, devida a uma força externa tangencial à superfície, por exemplo, ele se deforma até que as tensões de cisalhamento internas que aparecem em resposta à força externa equilibrem a força externa. Nesse momento, o sólido fica novamente em equilíbrio. Dizemos que os sólidos podem equilibrar tensões de cisalhamento.

Por outro lado, quando um fluido é submetido a uma tensão de cisalhamento ele escoa, ou flui, e permanece escoando até que a tensão de cisalhamento termine. Dizemos que os fluidos não podem equilibrar tensões de cisalhamento. Esta propriedade dos fluidos pode ser considerada como a *definição* de fluido do ponto de vista macroscópico.

Uma definição formal de pressão pode ser feita da seguinte maneira. Consideremos uma superfície imaginária *S* que divide um fluido em duas partes. Um elemento de área infinitesimal dessa superfície será caracterizado como tendo *área dS* e *direção* dada pelo vetor normal ao elemento de área e de módulo unitário $\hat{n}$ (veja a figura abaixo).

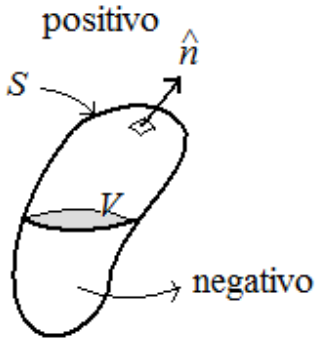


Pode-se então definir o *vetor elemento de superfície* como

$$d\vec{S} = \left(dS_x, dS_y, dS_z\right) = \hat{n}dS \ . \qquad (14)$$

A escolha sobre qual dos dois lados da superfície *S* deve ser definido como a direção positiva do vetor $\hat{n}$ é arbitrária, mas uma vez feita a escolha ela deve ser consistentemente mantida. O lado para o qual $\hat{n}$ aponta será chamado de positivo e o lado oposto de negativo.

Por convenção universal, dada uma superfície fechada o lado positivo é escolhido como o lado que aponta para fora do volume encerrado pela superfície (veja a figura a seguir).



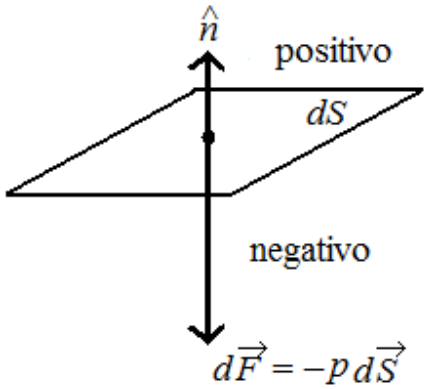
Seja agora um elemento de superfície como o definido acima em um ponto qualquer de um fluido em equilíbrio hidrostático. Como o fluido está em equilíbrio, não há tensões de cisalhamento e a única força de contato atuando sobre o elemento de superfície é a força normal exercida pelo material do lado positivo da superfície sobre o material do lado negativo dela. Essa força pode ser escrita como

$$d\vec{F} = -pd\vec{S} = -p\hat{n}dS \,, \qquad (15)$$

onde o coeficiente de proporcionalidade p é chamado de *pressão*.

Segundo convenção também universal, uma pressão *positiva* corresponde a uma força apontando para dentro de um volume (pense na pressão atmosférica sobre o seu corpo). Como a direção positiva da superfície que envolve o volume aponta para *fora* do volume, para que a definição acima resulte numa força apontando para *dentro* do volume quando a pressão é positiva é necessário o sinal de menos multiplicando o termo da direita em (15).

A figura abaixo ilustra o que foi dito acima: a força atuando sobre um elemento de superfície quando a pressão é positiva aponta no sentido contrário ao da normal à superfície.



A força total atuando sobre uma superfície S é dada pela soma de todas as pequenas forças atuando sobre todos os elementos de superfície que compõem S:

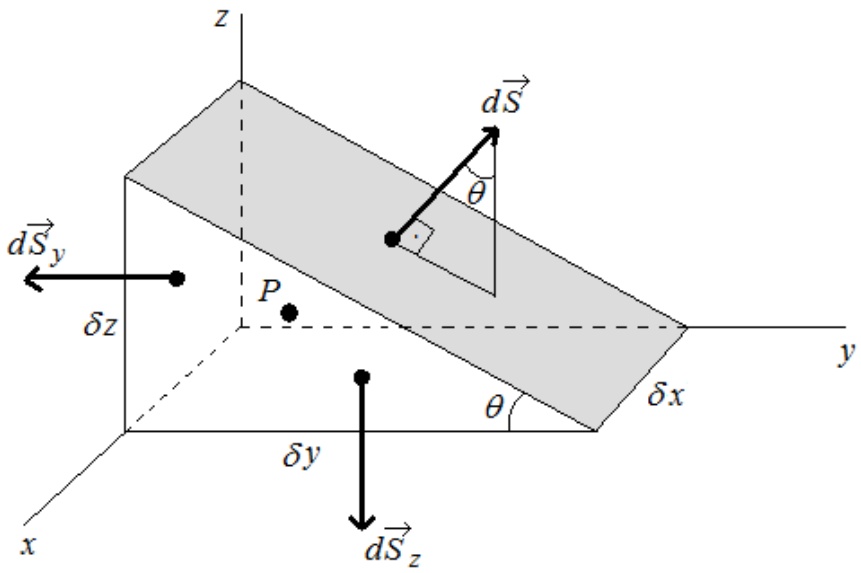
$$\vec{F} = \int_S d\vec{F} = -\int_S p d\vec{S} \,. \qquad (16)$$

Em princípio, a definição de pressão feita acima permite que a pressão tenha valores diferentes para elementos de superfície com diferentes orientações $\hat{n}$ em um ponto qualquer do fluido. No entanto, a pressão é uma grandeza escalar que depende apenas do ponto onde é medida e não da orientação da superfície.

Pascal foi o primeiro a perceber isto e, por isso, este fato é conhecido como *lei de Pascal*.

O enunciado formal da lei de Pascal é: *A pressão em um fluido em repouso é independente da direção do elemento de superfície sobre o qual ela atua.*

A seguir, faremos uma demonstração da lei de Pascal. Vamos assumir, por hipótese, que a pressão possa depender da orientação da superfície. Consideremos então um elemento de volume de lados infinitesimais no formato de uma cunha tendo o ponto P onde se mede a pressão em seu centro (veja a figura abaixo).



Vamos chamar as áreas dos cinco lados do elemento de volume de dS, dS_{x1}, dS_{x2}, dS_y e dS_z, onde dS_{x1} é a área da face da cunha perpendicular ao eixo x cuja normal aponta na direção positiva de x e dS_{x2} é a área da face da cunha perpendicular ao eixo x cuja normal aponta na direção negativa de x (note que essas duas áreas são iguais, apenas as suas normais apontam em sentidos opostos).

Os valores dessas cinco áreas podem ser escritos como

$$dS = \delta x \delta z / \text{sen}\theta = \delta x \delta y / \cos\theta,$$

$$dS_{x1} = dS_{x2} = (1/2)\delta y \delta z,\ dS_y = \delta x \delta z \text{ e } dS_z = \delta x \delta y,$$

de maneira que os seus respectivos vetores elementos de superfície são (em termos de suas componentes cartesianas):

$$d\vec{S} = (0, \text{sen}\,\theta dS, \cos\theta dS) = \left(0, \text{sen}\,\theta \frac{\delta x \delta z}{\text{sen}\,\theta}, \cos\theta \frac{\delta x \delta y}{\cos\theta}\right) = (0, \delta x \delta z, \delta x \delta y),$$

$$d\vec{S}_{x1} = \frac{1}{2}(\delta y \delta z, 0, 0) = -d\vec{S}_{x2} = \frac{1}{2}(-\delta y \delta z, 0, 0),$$

$$d\vec{S}_y = (0, -\delta x \delta z, 0),$$

$$d\vec{S}_z = (0, 0, -\delta x \delta y).$$

A força de superfície total atuando sobre o elemento de volume é dada pela soma das forças de superfície atando sobre suas faces,

$$d\vec{F} = -p d\vec{S} - p_{x1} d\vec{S}_{x1} - p_{x2}\left(-d\vec{S}_{x1}\right) - p_y d\vec{S}_y - p_z d\vec{S}_z, \quad (17)$$

onde as pressões atuando sobre as cinco faces da cunha foram indicadas por p, p_{x1}, p_{x2}, p_y e p_z. Substituindo as expressões para os cinco vetores elementos de superfície nesta equação, temos que as componentes da força de superfície total nas direções x, y, z são

$$dF_x = \frac{1}{2}(p_{x2} - p_{x1})\delta y \delta z, \quad (18)$$

$$dF_y = (p_y - p)\delta x \delta z \quad (19)$$

e

$$dF_z = (p_z - p)\delta x \delta y \,. \tag{20}$$

No equilíbrio, essas forças superficiais devem balancear as forças volumétricas atuando sobre o elemento de volume.

Seja $\vec{f}$ a densidade das forças volumétricas atuando sobre o fluido. Podemos então escrever a força volumétrica total atuando sobre o elemento de volume como

$$d\vec{F}_{\text{vol}} = \vec{f} dV = \vec{f} \delta x \delta y \delta z \,. \tag{21}$$

A condição de equilíbrio hidrostático é a de que as somas das componentes das forças superficiais e volumétricas nas três direções espaciais sejam todas nulas, ou seja:

$$dF_x + f_x dV = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(p_{x2} - p_{x1})\delta y \delta z + f_x \delta x \delta y \delta z = 0 \,, \tag{22}$$

$$dF_y + f_y dV = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (p_y - p)\delta x \delta z + f_y \delta x \delta y \delta z = 0 \tag{23}$$

$$dF_z + f_z dV = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (p_z - p)\delta x \delta y + f_z \delta x \delta y \delta z = 0 \,. \tag{24}$$

No limite em que o volume do elemento de volume tende a zero, isto é, quando $\delta x \to 0$, $\delta y \to 0$ e $\delta z \to 0$, os termos com dimensão de volume nas equações acima vão para zero mais rapidamente que os termos com dimensão de área.

Isto quer dizer que no limite em que $dV \to 0$ as forças volumétricas podem ser desprezadas em comparação com as forças superficiais. Isto nos permite escrever as equações (22)–(24) como

$$(p_{x2} - p_{x1})\delta y \delta z = 0 \tag{25}$$

$$(p_y - p)\delta x \delta z = 0 \tag{26}$$

$$(p_z - p)\delta x \delta y = 0\,. \tag{27}$$

Estas equações implicam que $p = p_y = p_z$ e $p_{x1} = p_{x2} = p_x$.

Até agora só foi mostrado que a pressão no ponto P é a mesma nas direções y e z, mas pode ter um valor diferente na direção x. Porém, o elemento de volume em forma de cunha poderia ter sido desenhado com qualquer outra orientação, desde que continuasse contendo o ponto P em seu interior para que no limite $dV \to 0$ ele tenda ao ponto P.

Em particular, o elemento de volume poderia ser girado de maneira que a sua face em forma de rampa esteja ao longo da direção x ou ao longo da direção z.

Em tais casos, a repetição dos cálculos acima nos levaria às condições $p = p_x = p_z$ e $p_{y1} = p_{y2} = p_y$ e $p = p_x = p_y$ e $p_{z1} = p_{z2} = p_z$. Essas condições todas só podem ser satisfeitas se a pressão no ponto P for um escalar de valor p. Isto prova a lei de Pascal.

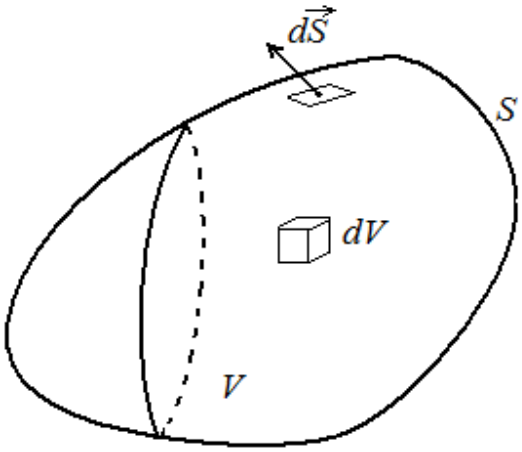
Por causa da lei de Pascal, podemos dizer que existe um *campo escalar de pressão* em um fluido. Um campo f em um meio contínuo é uma função $f(x, y, z, t)$ das coordenadas espaciais x, y, z e, possivelmente, do tempo t que representa o valor de alguma grandeza física em qualquer ponto do espaço e em qualquer instante do tempo.

Quando a grandeza f for escalar falamos de um campo escalar; quando ela for vetorial, falamos de um campo vetorial. Exemplos de campos escalares são a pressão $p(x, y, z, t)$, a densidade $\rho(x, y, z, t)$ e a temperatura $T(x, y, z, t)$. Exemplos de campos vetoriais são o campo de velocidades $\vec{v}(x, y, z, t)$, o campo gravitacional $\vec{g}(x, y, z, t)$ e os campos elétrico e magnético $\vec{E}(x, y, z, t)$ e $\vec{B}(x, y, z, t)$.

Na prova da lei de Pascal feita acima, pudemos desprezar as forças volumétricas em relação às forças superficiais porque estávamos interessados na pressão em um ponto do fluido e, para determinar suas propriedades, tomamos o limite em que um elemento de volume do fluido tendia a zero.

De maneira geral, porém, quando se estuda estática dos fluidos não se está interessado no equilíbrio de um *ponto* do fluido, mas de um *volume macroscópico* dele. Nosso próximo passo, portanto, será determinar equações para o equilíbrio hidrostático de um volume macroscópico arbitrário de um fluido.

Vamos considerar um volume V arbitrário de fluido como o da figura abaixo. A área superficial do volume é S. Um elemento de volume é indicado por dV e um vetor elemento de superfície por $d\vec{S}$.



Vamos supor que o fluido no interior do volume esteja sob ação de uma força volumétrica cuja densidade é $\vec{f}$ e sob ação de forças superficiais devidas ao campo de pressão *p* no fluido (como o fluido está em equilíbrio, as tensões de cisalhamento são nulas).

A força total atuando sobre o volume *V* é então

$$\vec{F}_{total} = \int_V \vec{f} dV - \oint_S p d\vec{S} \quad , \tag{28}$$

onde o círculo sobre a integral de superfície no segundo termo apenas indica que a integral deve ser feita pela superfície fechada que encerra o volume.

A condição de equilíbrio hidrostático é que a força total sobre qualquer volume de fluido deve ser nula, ou seja:

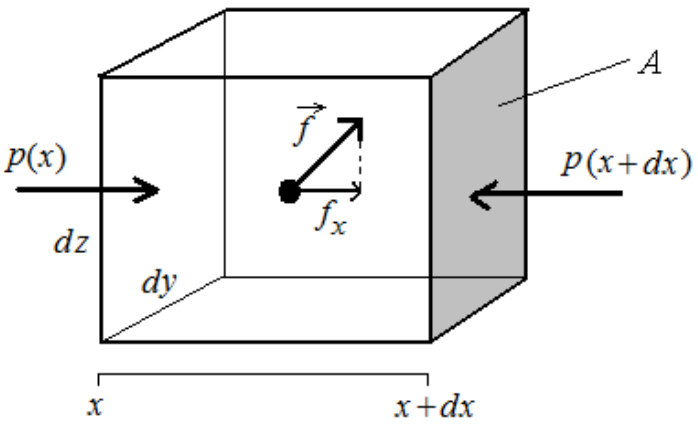
$$\int_V \vec{f} dV - \oint_S p d\vec{S} = 0 \quad . \tag{29}$$

Se esta condição não for satisfeita exatamente em algum instante de tempo, o fluido deve se mover nesse instante.

A equação (29) é a chamada *forma integral* da condição de equilíbrio hidrostático.

Para que as integrais na equação (29) possam ser resolvidas, é necessário conhecer os campos $\vec{f}(x, y, z)$ e $p(x, y, z)$ para *todos* os pontos do volume do fluido. Isto nem sempre é fácil ou possível e, normalmente, é mais conveniente usar uma forma *local* da condição de equilíbrio, válida para um *ponto* do fluido ao invés de para um *volume*.

Para estabelecer uma forma local da condição de equilíbrio, consideremos o elemento de volume dV no interior do volume V na figura acima. Os lados do elemento de volume são dx, dy e dz, de maneira que o seu volume é $dV = dxdydz$. Seja $\vec{f}(x, y, z)$ a densidade de força volumétrica externa atuando sobre o fluido. Supondo que o elemento de volume é suficientemente pequeno para que a densidade $\vec{f}$ não varie significativamente em seu interior, podemos tomar o valor de $\vec{f}$ no ponto central do elemento de volume para representar $\vec{f}$ por todo o elemento de volume (veja a figura abaixo).



A força volumétrica atuando sobre o volume dV é então

$$\vec{f}dV = \vec{f}dxdydz\,, \tag{30}$$

onde o vetor $\vec{f}$ acima atua sobre o ponto central de dV.

Vamos fazer nossa análise separando os cálculos vetoriais em suas componentes nas direções x, y e z. Para isso, vamos precisar das componentes da força acima ao longo dessas três direções. Elas são:

$$f_x dxdydz,\ f_y dxdydz \text{ e } f_z dxdydz.$$

Começando pela análise das forças ao longo da direção x, a figura anterior nos mostra que a condição de equilíbrio das forças ao longo da direção x é (lembre-se que a força devida à pressão sobre cada face é $d\vec{F} = -p\hat{n}dS$)

$$f_x dxdydz - p(x)\big(-A\big) - p(x+dx)A = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_x A dx + p(x)A - p(x+dx)A = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_x = \frac{p(x+dx) - p(x)}{dx}.$$

No limite em que $dx \to 0$,

$$f_x = \frac{dp}{dx}\,. \tag{31}$$

Este resultado nos diz que a componente *x* da força volumétrica em um dado ponto do fluido é igual à taxa de variação da pressão com *x* nesse ponto. Refazendo a análise acima para as direções *y* e *z* obtemos resultados similares:

$$f_y = \frac{dp}{dy} \tag{32}$$

e

$$f_z = \frac{dp}{dz} . \tag{33}$$

Estas três equações podem ser escritas de forma mais compacta como

$$\vec{f} = \text{grad}\, p = \nabla p , \tag{34}$$

onde operador gradiente, ou *nabla*, é definido por

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) . \tag{35}$$

Lembrando das aulas de cálculo, o vetor gradiente de *p*, ∇p, é normal a superfícies em que a pressão *p* é constante e aponta no sentido de máxima variação positiva da pressão. As superfícies em que *p* é constante são chamadas de *superfícies isobáricas*.

Note que a equação (34) pode ser reescrita como

$$\vec{f} - \nabla p = 0 . \tag{36}$$

A equação (36) é a chamada *forma diferencial* da condição de equilíbrio hidrostático. Ela é uma equação diferencial vetorial que, no equilíbrio, deve ser válida para todos os pontos do fluido.

Por exemplo, quando $\vec{f}$ for a densidade da força gravitacional, atuando ao longo do eixo z tomado como positivo apontando para cima, de maneira que

$$f_x = 0, f_y = 0 \text{ e } f_z = -\rho g,$$

as equações (31)–(33) ou (36) nos dão

$$\frac{dp}{dx} = 0 \ , \tag{37}$$

$$\frac{dp}{dy} = 0 \ , \tag{38}$$

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \ . \tag{39}$$

As duas primeiras equações acima implicam que, num campo gravitacional, a pressão no interior do fluido não depende de x e y. A terceira equação, que pode ser reescrita como $dp = -\rho g dz$, implica que, num campo gravitacional, a pressão no fluido diminui com a altitude e aumenta com a profundidade. Esses são os comportamentos com os quais estamos acostumados.

Vale a pena mencionar que o caso do campo gravitacional é um dos casos simples em que a forma integral da condição de equilíbrio hidrostático (equação 29) pode ser resolvida sem aproximações. Isto por causa da *simetria* do problema. Como exercício para casa, obtenha a solução da equação (29) supondo que $\vec{f} = -\rho g \hat{z}$ e que a pressão só varia ao longo do eixo z, $p = p(z)$. Mostre que a solução obtida é idêntica à da equação (39).

Um caso particular da equação (39) ocorre quando a densidade do fluido é constante: ρ = constante. Um fluido cuja densidade é constante é chamado de *fluido incompressível*. Fazendo ρ = constante na equação (39), ela pode ser facilmente integrada em relação a z. Tomando os limites de integração como z_1 e z_2 ($z_2 > z_1$), obtemos

$$p(z_2) - p(z_1) = -\rho g (z_2 - z_1). \qquad (40)$$

Se z_1 corresponder à superfície da terra (por exemplo, ao nível do mar) em que a pressão é a pressão atmosférica p_0 e z_2 for uma altura h acima da superfície, a equação acima implica que

$$p(h) = p_0 - \rho g h, \qquad (41)$$

ou seja, a pressão decresce linearmente com a altitude. Obviamente, como o ar é um fluido *compressível* este resultado está errado.

Notem, por exemplo, que a equação (41) prevê que a pressão diminui linearmente com a altura até chegar a zero para uma altura

$$h_0 = \frac{p_0}{\rho g}.$$

Substituindo os valores p_0 = 1 atm, ρ = 1,2 kg/m^3 (densidade do ar a condições normais de pressão e temperatura) e g = 9,8 m/s^2, chegamos a h_0 = 8,6 km. Este valor é um pouco mais baixo do que a altura do Monte Everest (~8,8 km), o que prova que a equação (41) está errada, pois alpinistas já chegaram ao topo do Monte Everest sem necessidade de roupas pressurizadas. De qualquer maneira, o resultado obtido fornece uma estimativa correta da ordem de grandeza da altitude a partir da qual as propriedades da atmosfera começam a mudar em relação às condições na superfície da terra (fim da troposfera).

Por outro lado, aplicando a equação (40) a um líquido incompressível no interior de um recipiente e tomando z_1 como a superfície em contato com o ar (chamada de *superfície livre* do líquido) e z_2 como estando a uma profundidade h abaixo da superfície livre

$$p(h) = p_0 + \rho g h, \qquad (42)$$

ou seja, a pressão no interior do líquido aumenta linearmente com a profundidade.

A equação (42) é conhecida como lei de Stevin, em homenagem ao engenheiro e matemático flamengo Simon Stevin (1548-1620) que estabeleceu experimentalmente que a pressão no interior de um líquido não depende da forma do recipiente, mas apenas da profundidade.

Por exemplo, considerando que a densidade da água salgada do mar é constante e vale $\rho_{\text{mar}} = 1030\ \text{kg/m}^3$, a equação (42) prevê que a cada aumento de h na profundidade do mar a pressão aumenta por 1 atm, onde h vale

$$h = \frac{\Delta p}{\rho_{\text{mar}} g} = \frac{1{,}013\times10^5\ \text{Pa}}{\left(1030\ \text{kg/m}^3\right)\left(9{,}8\ \text{m/s}^2\right)} = 10{,}04\ \text{m} \cong 10\ \text{m} . \quad (43)$$

Esta é uma boa estimativa para o aumento real da pressão à medida que se afunda mais e mais no oceano. Em particular, para o fundo do mar, onde $h \sim 10$ km, a equação acima prevê que a pressão seria de aproximadamente 1000 atm.

Na realidade, a pressão no fundo do oceano é um pouco maior que 1000 atm, o que indica que a densidade da água do mar não é constante (a variação de ρ_{mar} entre a superfície e o fundo é de aproximadamente 4,5%). Porém, a hipótese de tomar um líquido como a água como um fluido incompressível é muitíssimo melhor do que a de tratar um gás como o ar como um fluido incompressível.

A força gravitacional é uma força conservativa, isto é, ela pode ser obtida a partir de uma energia potencial U (no caso, energia potencial gravitacional) por

$$\vec{F} = -\nabla U \ . \tag{44}$$

Definindo a densidade de energia potencial gravitacional (energia potencial gravitacional por unidade de volume) por u, podemos escrever

$$\vec{f} = -\nabla u \ . \tag{45}$$

Substituindo (45) em (36),

$$-\nabla u - \nabla p = 0 \Rightarrow \nabla\left(u + p\right) = 0 \ . \tag{46}$$

Esta equação implica que

$$u + p = \text{constante} \ . \tag{47}$$

Assim como se pode pensar em superfícies equipotenciais para o campo gravitacional, também se pode pensar em superfícies equipotenciais para o campo de pressão. Estas últimas seriam superfícies onde o valor do "potencial" p é constante, ou seja, seriam as superfícies isobáricas. Portanto, as superfícies equipotenciais do "potencial" p são as superfícies isobáricas.

A forma diferencial da condição de equilíbrio hidrostático,

$$\vec{f} = \nabla p \ ,$$

exige que a densidade de força volumétrica seja um *campo gradiente*[4] para que haja equilíbrio. Como a densidade da força gravitacional é um campo gradiente (veja a equação 45), é possível a existência de equilíbrio hidrostático para um fluido em um campo gravitacional. Lembrando das aulas de cálculo de várias variáveis, um campo gradiente satisfaz a relação

$$\nabla \times \left(\nabla \Phi \right) = 0 \,, \tag{48}$$

isto é, o rotacional de um campo gradiente é nulo.

Portanto, se a força volumétrica agindo sobre um fluido tiver rotacional não nulo,

$$\nabla \times \vec{f} = 0 \,, \tag{49}$$

o fluido nunca poderá estar em equilíbrio hidrostático.

[4] Seja um campo escalar $\Phi(x, y, z)$ qualquer. O gradiente de Φ, $\nabla \Phi$, é um campo vetorial chamado de campo gradiente.