Oscilações Forçadas e Ressonância

Nas aulas precedentes estudamos oscilações *livres* de diferentes tipos de sistemas físicos. Em uma oscilação livre, dadas as condições iniciais (posição e velocidade em $t = 0$), as propriedades do movimento oscilatório do corpo são determinadas pelos parâmetros relativos ao próprio corpo (m) e às forças restauradora (por exemplo, a constante k da mola) e dissipativa (por exemplo, o coeficiente b visto na aula passada) atuando sobre ele.

Nesta aula vamos estudar o caso importante em que o corpo está sob a ação de uma *força externa periódica* que, em geral, não possui a mesma freqüência das oscilações do corpo livre.

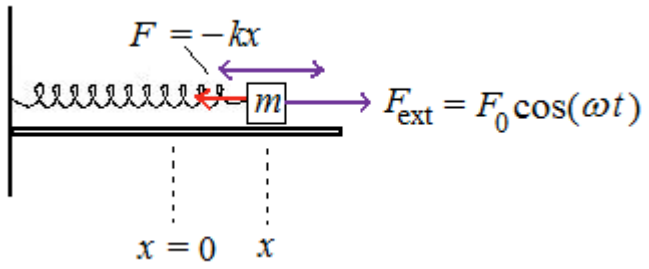
Como modelo do corpo sujeito à força externa, vamos continuar usando o modelo de um corpo de massa m preso a uma mola de constante k oscilando em um meio dissipativo cuja força de resistência é dada por $-b\dot{x}$. Então, a freqüência angular *natural*, ou *própria*, de oscilação do corpo é $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Vamos supor que a força externa oscilatória é dada por

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t). \tag{1}$$

Ou seja, a frequência angular da força externa é ω.

A situação considerada é ilustrada pela figura abaixo (a força de amortecimento não foi mostrada para não sobrecarregar a figura).



A equação de movimento para o sistema é então:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt} + F_0\cos(\omega t),$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t), \qquad (2)$$

onde $\gamma = b/m$ como antes.

Antes de passarmos para o estudo matemático da equação (2), vamos considerar o problema da oscilação forçada do ponto de vista qualitativo.

Quando o corpo é deslocado de sua posição de equilíbrio e então solto, ele começa a oscilar com sua frequência angular natural ω_0. A

força externa periódica, no entanto, tentará impor a sua frequência própria ω sobre o corpo. O movimento resultante será algum tipo de combinação de oscilações com as duas frequências, ω_0 e ω. No entanto, por causa da presença da força dissipativa a componente oscilatória com a frequência natural do corpo ω_0 tenderá a desaparecer.

O estágio inicial do movimento, no qual as duas oscilações – com ω_0 e ω – se combinam, é chamado de *transiente*. Depois de um certo tempo, porém, bem maior que o tempo de decaimento τ_d da oscilação amortecida, a componente da oscilação com frequência ω_0 terá decaído e o único movimento que continua é o com frequência ω (supostamente inalterada) devido à força externa. Neste segundo estágio temos o que se chama de *movimento estacionário* do oscilador forçado.

Em geral, quando se estuda oscilações forçadas o interesse principal é entender o comportamento do sistema no estado estacionário. Isto é o que faremos nesta aula.

Vejamos agora a situação do ponto de vista matemático. A equação (2) é uma equação diferencial de segunda ordem *inomogênea*. Da teoria das equações diferenciais ordinárias, sabemos que se $x_1(t)$ for

uma solução *particular* da equação inomogênea, então a solução geral da equação inomogênea é dada pela soma da solução geral da equação homogênea, que chamaremos aqui de $x_h(t)$, com a solução particular $x_1(t)$:

$$x(t) = x_h(t) + x_1(t). \tag{3}$$

A equação homogênea é a equação do oscilador harmônico amortecido estudado na aula passada. A sua solução geral foi obtida naquela aula (vamos considerar aqui apenas o caso em que ocorre oscilação amortecida). Ela é

$$x_h(t) = Ae^{-\frac{\gamma t}{2}} \cos(\omega' t + \varphi),$$

onde $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$ é a freqüência da oscilação amortecida livre.

A solução $x_h(t)$ decai no tempo de maneira exponencial com um tempo de decaimento $\tau_d = 2/\gamma$. Para tempos bem maiores que τ_d os valores de $x_h(t)$ tornam-se desprezíveis e a solução geral é dada apenas por $x_1(t)$.

Da discussão acima decorre que o nosso interesse nesta aula será apenas o de obter uma solução particular da equação (2) e estudar o

seu comportamento. Este comportamento será o comportamento *estacionário* do oscilador harmônico amortecido forçado.

Vamos agora começar nossa análise. Vamos começar atacando o problema considerando o caso simplificado em que não existe amortecimento ($\gamma = 0$). Vocês podem perguntar: no caso em que não há amortecimento não há decaimento da oscilação com frequência ω_0 e, portanto, toda a análise feita acima deixa de ser válida. Porque então estudar o regime de oscilações estacionárias com freqüência ω no caso sem amortecimento? No caso sem amortecimento este regime não existe!

Isto é verdade e vocês verão que as equações estudadas neste caso levarão a alguns comportamentos não físicos (por estar erradas). Porém, as equações também levarão a alguns comportamentos que ocorrerão no caso com amortecimento, e o entendimento desses comportamentos fica mais fácil se começarmos a estudá-los no caso simples sem amortecimento. Portanto, vamos a ele.

No caso idealizado em que não há amortecimento a equação (2) torna-se

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t). \tag{4}$$

Neste caso, o decaimento da oscilação de frequência ω_0 não ocorre, mas vamos *ignorar* isso aqui e considerar que ele ocorre. Vamos, portanto, procurar por uma solução particular da equação (4) correspondendo ao caso estacionário em que o movimento se dá *apenas* com a freqüência do oscilador externo ω.

Para obter a solução da equação (4) no estado estacionário, vamos propor que ela seja da forma

$$x(t) = B\cos(\omega t). \tag{5}$$

Notem que esta proposição pressupõe que a solução de estado estacionário possui a *mesma* frequência angular da força externa. Notem que também estamos supondo que ela possui a mesma fase.

Nada nos garante, porém, que a solução proposta (5) é válida. Para verificar se ela é válida, devemos substituí-la em (4) e verificar se é possível encontrar um valor real para a constante B.

Fazendo isso (mostre como exercício), obtemos

$$-B\omega^2\cos(\omega t) + B\omega_0^2\cos(\omega t) = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t),$$

que implica que

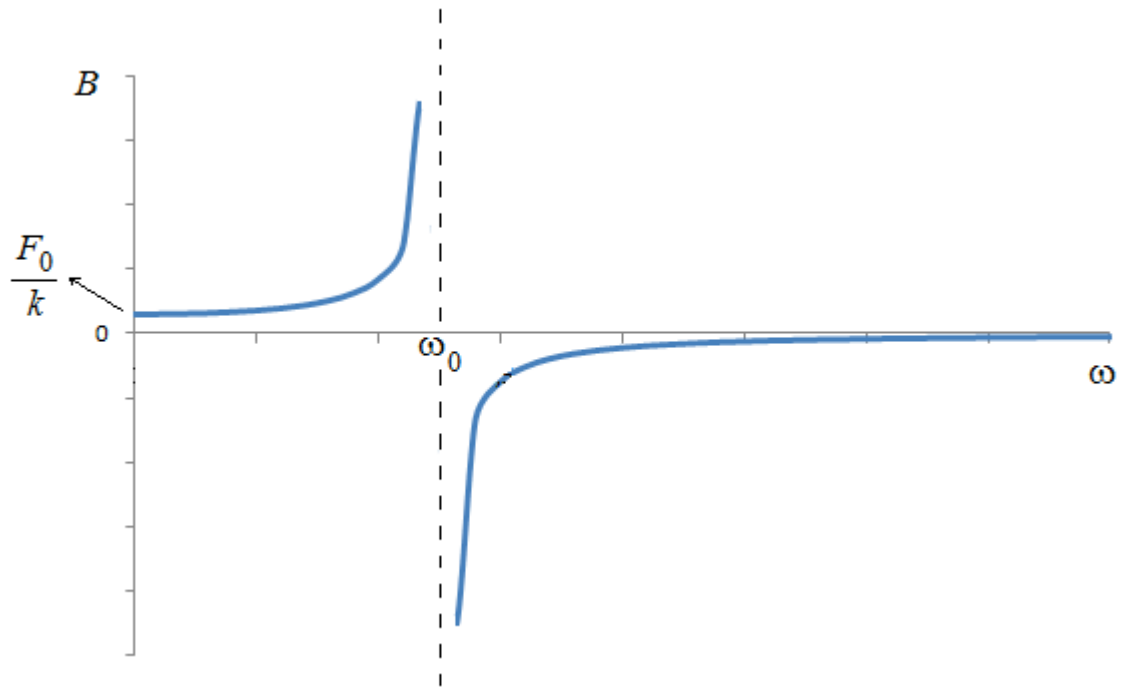
$$B\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) = \frac{F_0}{m}$$

ou

$$B = \frac{F_0}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}. \qquad (6)$$

Este valor de B é válido (isto é, é real), o que implica que a solução proposta é de fato uma solução (particular) da equação (4).

Notem que a expressão (6) implica que B depende de ω. O gráfico abaixo ilustra o comportamento de B em função de ω.



Observem primeiramente que para $\omega < \omega_0$ os valores de B são *positivos*, mas para $\omega > \omega_0$ os valores de B são *negativos*. Isto

implica que, para $\omega > \omega_0$ as oscilações do corpo estão defasadas de 180° em relação às suas oscilações para $\omega < \omega_0$.

Observe também que B muda abruptamente de altos valores positivos para altos valores negativos quando ω passa por ω_0. Em outras palavras, sem levar em conta o sinal, o módulo de B torna-se infinitamente grande quando ω é igual a ω_0. Este fenômeno é conhecido como *ressonância*.

Baseado no resultado obtido, pode-se reescrever a solução proposta (5) de uma maneira mais elegante. Ela é

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)\,, \tag{7}$$

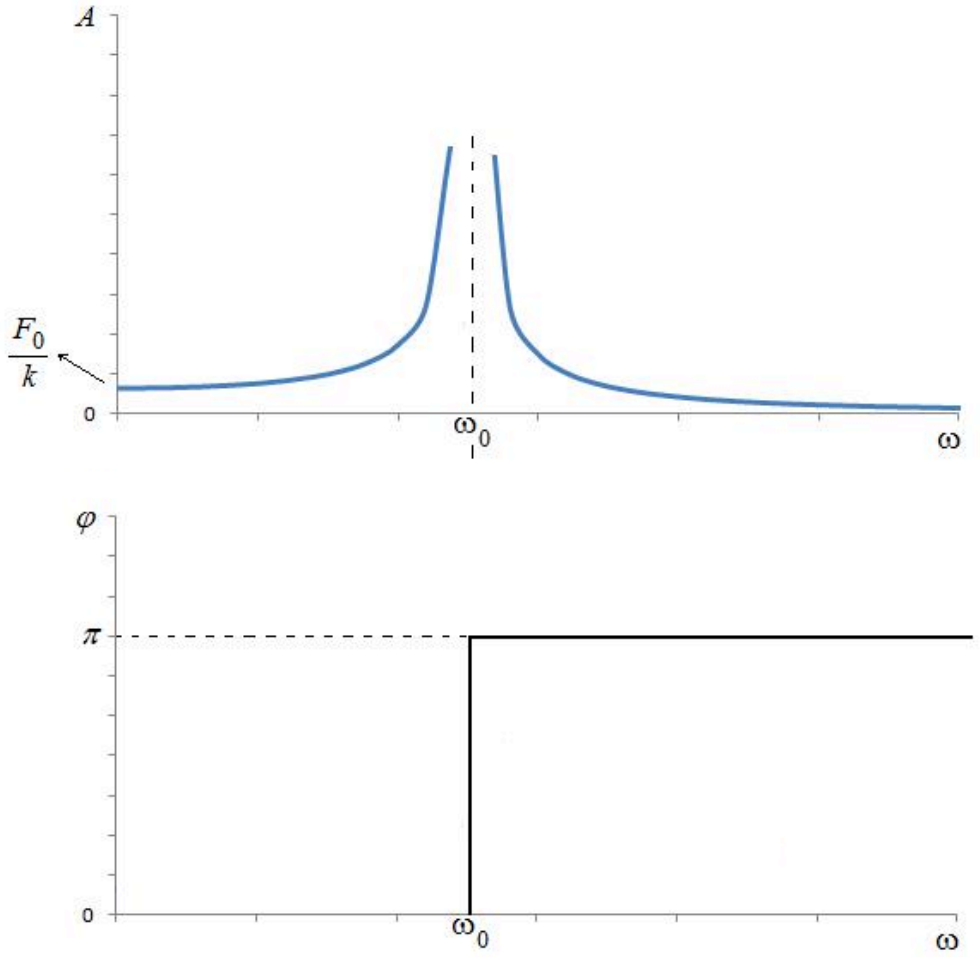
onde

$$A = |B| = \frac{F_0}{m\left|\omega_0^2 - \omega^2\right|} \tag{8}$$

e

$$\varphi = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \omega < \omega_0 \\ \pi & \text{se} \quad \omega > \omega_0 \end{cases}. \tag{9}$$

Os gráficos de A e de φ em função de ω são dados abaixo.



Observe os gráficos e certifique-se de que você entende a equivalência entre as equações (5) e (7). Lembre-se que $\cos(\omega t - \pi) = -\cos(\omega t)$.

A forma de se expressar a solução do problema pela equação (7) torna explícito o fato de que as oscilações do corpo forçado têm a mesma fase que as oscilações da força externa para $\omega < \omega_0$ e que as oscilações do corpo forçado estão defasadas de 180° ($\varphi = \pi$) em relação às oscilações da força externa para $\omega > \omega_0$.

Esta inversão de fase quando ω passa por ω_0 é um fenômeno que acontece de fato no mundo real, mesmo quando há amortecimento. Já o valor *infinito* da amplitude A para $\omega = \omega_0$ e o salto *descontínuo* da fase φ quando ω passa por ω_0 não acontecem de fato no mundo real (isto é, não são físicos). Eles são conseqüências matemáticas da limitação do modelo proposto aqui, que está desprezando a dissipação (e também de efeitos não-lineares devido à quebra da hipótese de pequenas oscilações quando $\omega = \omega_0$).

Uma maneira de entender a inversão de fase quando ω passa por ω_0 é analisando a equação de movimento (4). A aceleração do corpo forçado é dada por (derivando-se duas vezes a equação (7) em relação a t):

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t).$$

Substituindo esta aceleração na equação (4), temos

$$-\omega^2 x + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t),$$

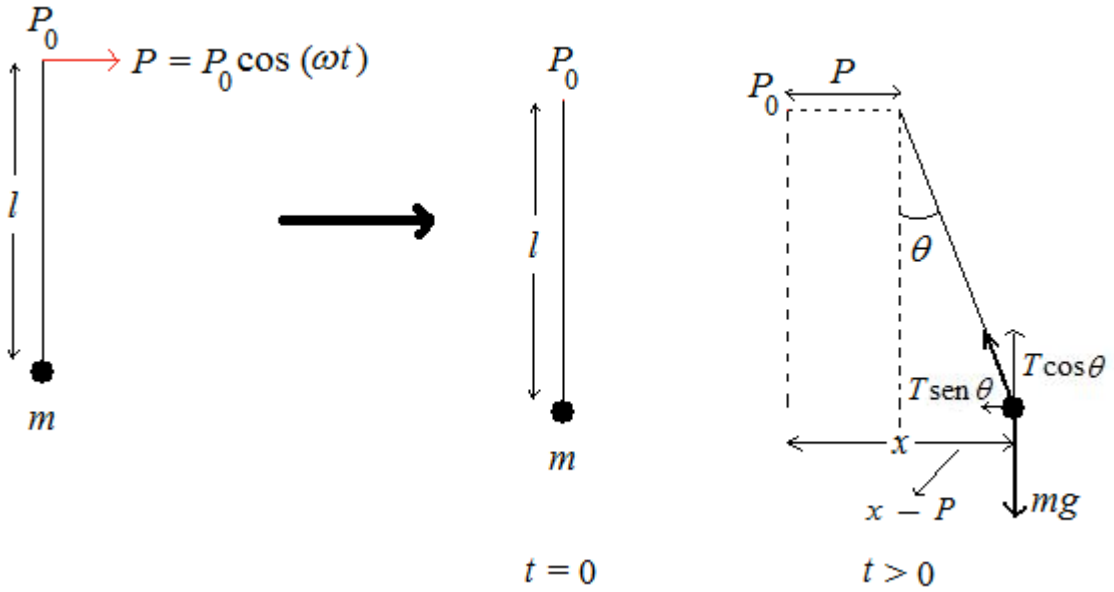
ou

$$x = \frac{F_0}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}\cos(\omega t). \qquad (10)$$

No caso em que $\omega < \omega_0$, o termo da direita na equação acima é *positivo*, implicando que o deslocamento do corpo forçado tem o

mesmo sentido da força externa F_0. Já no caso em que $\omega > \omega_0$, o termo da direita é *negativo*, implicando que o deslocamento do corpo forçado tem sentido contrário ao da força externa F_0, isto é, está em oposição de fase a ela.

Uma outra maneira de visualizar a inversão de fase, que vocês podem verificar fazendo experimentos simples em casa, é analisando o comportamento do pêndulo simples quando seu ponto de suspensão é movimentado na horizontal para um lado e outro de forma harmônica (veja a figura abaixo).



Desprezando possíveis movimentos verticais aos quais o corpo de massa m possa estar sujeito, uma análise da figura acima nos dá que

$$T\cos\theta = mg\,.$$

Para pequenos ângulos de oscilação, $\cos\theta \cong 1$ e então

$$T = mg\,.$$

Portanto, a força restauradora atuando sobre o corpo é (veja a figura)

$$F_r = -T\text{sen}\theta = -mg\text{sen}\theta.$$

Da figura também temos que

$$\text{sen}\theta = \frac{x-P}{l},$$

de maneira que

$$F_r = -m\frac{g}{l}\left(x-P\right) = -m\omega_0^2\left(x-P\right),$$

onde usamos a definição da frequência angular do pêndulo simples feita na aula 3,

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}\,.$$

A equação de movimento para o pêndulo simples cujo ponto de suspensão sofre deslocamentos horizontais harmônicos é então

$$m\ddot{x} = F_r = -m\omega_0^2\left(x-P\right),$$

ou, rearranjando,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_o^2 P\,.$$

Substituindo agora a expressão para o deslocamento temporal (harmônico) do ponto de suspensão P, chegamos à equação final:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_o^2 P_0 \cos(\omega t). \tag{11}$$

Notem que esta equação é formalmente idêntica à equação (4). A identidade ocorre se fizermos

$$\omega_o^2 P_0 = \frac{F_0}{m}.$$

Exercício: verifique que os termos dos dois lados da expressão acima têm a mesma dimensão (de aceleração).

Como a equação (11) é formalmente idêntica à equação (4), as duas têm a mesma solução. Olhando a solução de (4) dada por (7), temos que a solução de (11) é

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi), \tag{12}$$

com

$$A = \frac{\omega_o^2 P_0}{\left|\omega_0^2 - \omega^2\right|} \tag{13}$$

e

$$\varphi = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \omega < \omega_0 \\ \pi & \text{se} \quad \omega > \omega_0 \end{cases}. \tag{14}$$

A análise feita acima mostrou que o pêndulo simples com seu ponto de suspensão P sofrendo deslocamento harmônico dado por $P = P_0\cos(\omega t)$ tem o mesmo comportamento *estacionário* que o do oscilador harmônico simples forçado por uma força externa $F = F_0\cos(\omega t)$. Em particular, os gráficos das páginas 7 e 9 se aplicam ao caso do pêndulo também, de maneira que suas oscilações devem sofrer uma inversão de fase em relação ao deslocamento P quando a frequência de P tornar-se maior que ω_0.

Experimento para casa: Arranje um pêndulo (um fio fino e comprido com uma bola presa a uma de suas extremidades) e, com sua mão, faça a extremidade pela qual o pêndulo está suspenso se movimentar horizontalmente com uma frequência f: (i) bem pequena; e (ii) bem grande. Observe o que acontece (é melhor se concentrar no movimento da sua mão, para que ele permaneça horizontal e estacionário, e pedir para um colega dizer o que se passa com a bola na outra extremidade.

Você (ou seu colega) deverá observar o seguinte (lembre-se que $\omega = 2\pi f$):

Para $f \to 0$	$A \to P_0$	$\varphi = 0$
Para $f \to \infty$	$A \to 0$	$\varphi = \pi$

Tente também achar a frequência de ressonância. Uma dica sobre que valor de f usar vem da fórmula:

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \approx \frac{0{,}5}{\sqrt{l}},$$

onde l é o comprimento do fio.

Espero que esse experimento caseiro seja suficiente para convencê-los de que há uma mudança de 180° na fase da oscilação forçada quando a freqüência angular ω da força externa torna-se maior que a frequência angular natural do oscilador ω_0.

Vamos agora passar ao estudo da equação (2) completa, isto é, com amortecimento. Os métodos de solução da equação (2) estão além dos objetivos deste curso, mas pode-se mostrar que sua solução estacionária é dada por:

$$x(t) = A\cos(\omega t - \varphi), \tag{15}$$

com A e φ dados por:

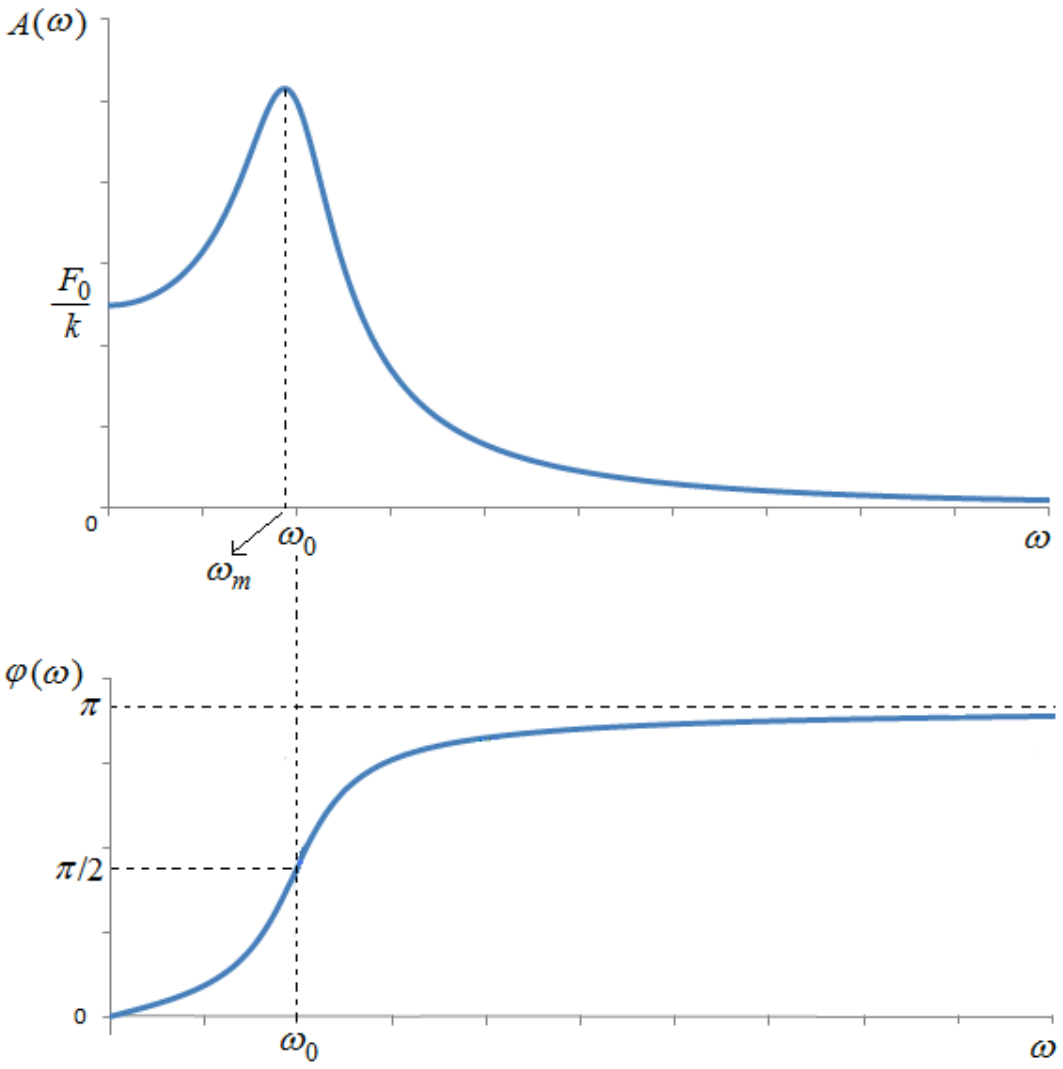
$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\gamma\omega\right)^2}} \tag{16}$$

e

$$\tan\varphi = \frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{17}$$

Os gráficos abaixo mostram como a amplitude A e a fase φ variam com ω.

Exercício: tente reproduzir esses gráficos. Em particular, tome cuidado na hora de fazer o gráfico de $\varphi(\omega)$, pois os programas para gráficos costumam traçar a função $y = \arctan(x)$ para $-\pi/2 < y < \pi/2$ e não para $0 < y < \pi$ como no gráfico mostrado.



Estes gráficos são muito parecidos com os gráficos da página 9. Note, porém, que a explosão para infinito de A e o salto descontínuo de 0 para π de φ quando $\omega = \omega_0$ não acontecem neste caso. Isto porque o modelo usado aqui consegue capturar melhor o que acontece no sistema físico.

O crescimento de φ de 0 para π à medida que ω aumenta de 0 para ∞ é suave (gradual). Em particular, quando $\omega = \omega_0$ o atraso de fase entre as oscilações da força externa e as oscilações do corpo é de $\pi/2$. Isto é algo que você provavelmente não conseguirá notar com o experimento caseiro do pêndulo proposto acima (porém, há muitos vídeos e *applets* na internet para se ver o efeito; em particular, procure no *youtube* pelo vídeo do "MIT Physics Demo – Driven Mechanical Oscillator").

Um fenômeno inesperado mostrado pelo modelo é que o valor máximo da amplitude não ocorre para ω_0, mas para uma frequência angular um pouquinho menor, indicada por ω_m no gráfico acima. Este é um fenômeno real (uma previsão do modelo que poderia passar despercebida se não tivéssemos o modelo; isto fornece um exemplo da importância de modelos teóricos em física). A diferença entre ω_0 e ω_m, no entanto, é tão pequena que na maioria das aplicações práticas costuma-se ignorá-la.