Modelos Conexionistas com tempo contínuo

Muitos fenômenos de aprendizado associativo podem ser explicados por modelos em que o tempo é uma variável discreta como nos casos vistos nas aulas anteriores. Tais modelos fazem previsões baseadas em valores discretos das variáveis (um ensaio após o outro), mas não conseguem descrever fenômenos em que o tempo é uma variável essencial. Para dar conta de fenômenos temporais, foram desenvolvidos modelos que procuram descrever os processos de mudanças associativas instante-a-instante, ao invés de ensaio-a-ensaio. Esses modelos são chamados de modelos "em tempo real". Nos modelos em tempo real, as grandezas envolvidas são tratadas como funções contínuas do tempo e, portanto, eles são descritos por **equações diferenciais** ao invés de equações de diferenças como nos modelos vistos até agora.

Para apresentar exemplos de modelos conexionistas de tempo contínuo, vamos novamente considerar o problema do aprendizado associativo visto em aulas anteriores.

O componente básico dos modelos conexionistas para o aprendizado associativo pode ser representado pela rede neural da Figura 1. A apresentação de estímulos do meio-ambiente ativa unidades sensoriais que fornecem uma representação interna desses estímulos. Essas unidades, por sua vez, afetam a ativação de uma unidade adaptativa, que é responsável pela geração da resposta. Os pesos das conexões entre as unidades sensoriais que representam os CSs e a unidade adaptativa são modificáveis no tempo, adaptando-se às combinações entre estímulos sensoriais e respostas que ocorrerem ao longo do tempo – daí decorre o nome de unidade adaptativa dado à unidade de saída da rede. Por outro lado, o peso da conexão entre a unidade sensorial que representa o US e a unidade adaptativa não varia no tempo. A saída da unidade adaptativa é interpretada como a resposta do sistema, e é uma função do seu nível de ativação y. A natureza da função f usada para modelar essa saída é crucial para que as previsões do modelo se ajustem aos dados experimentais.

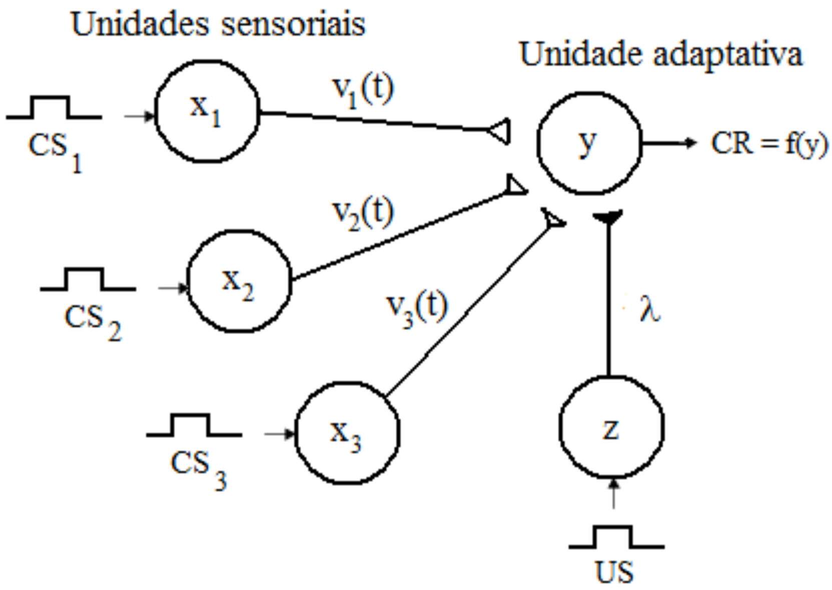

Figura 1. Rede neural básica para a construção de modelos conexionistas para aprendizado associativo. Os círculos representam as unidades da rede e as linhas com triângulos em uma de suas extremidades representam as conexões entre as unidades. Um triângulo pintado representa uma conexão cuja força não pode ser modificada e um triângulo vazio representa uma conexão cuja força pode ser modificada. As unidades à esquerda e na parte baixa da figura são unidades sensoriais e são ativadas diretamente por estímulos do meio ambiente (os CSs e o US). A unidade no canto superior direito da figura é uma unidade adaptativa. Ela é ativada pelas unidades sensoriais e sua saída representa o CR. As atividades das unidades sensoriais que representam os CSs são denotadas por x_i, a atividade da unidade que representa o US é denotada por z e o nível de ativação da unidade adaptativa é denotado por y. As forças das conexões entre as unidades sensoriais que representam os CSs e a unidade adaptativa são denotadas por $v_i(t)$ e a força da conexão entre a unidade que representa o US e a unidade adaptativa é λ.

Os modelos a serem considerados aqui são em tempo real, de maneira que as grandezas que descrevem o comportamento do modelo da Figura 1 (x_i, z, y, v_i) variam no tempo de forma contínua, e não discreta. Elas obedecem a equações diferenciais.

Um conjunto de equações diferenciais que pode ser usado para modelar as variações temporais dessas grandezas está dado a seguir.

A equação para a atividade da unidade sensorial que representa o US é a seguinte:

$$z(t) = \begin{cases} 1 \text{ se US estiver presente} \\ 0 \text{ se US estiver ausente} \end{cases} \quad (1)$$

Esta equação é muito simples; ela considera que a atividade da unidade sensorial que representa o US vale 1 se o US estiver presente e 0 se ele estiver ausente. A equação é escrita desta maneira (sem uma forma diferencial) para simplificar a implementação computacional do modelo. Na realidade, ela poderia ser escrita na forma de uma equação diferencial como as seguintes, mas com uma taxa de variação temporal muito maior para indicar que a ativação da unidade é praticamente instantânea quando o US está presente.

A equação para a atividade da unidade sensorial que representa o CS_i é a seguinte:

$$\frac{dx_i}{dt} = -\alpha x_i + k_1(k_2 - x_i)\text{CS}_i, \quad (2)$$

onde α é a taxa de variação de x_i na ausência de estímulos externos e k_1 e k_2 são constantes.

Na equação (2), supõe-se que o comportamento temporal do CS_i é do tipo função degrau. Ele é iniciado em t_0 e mantido constante até t_1, quando é terminado. Esse comportamento pode ser descrito por:

$$\text{CS}_\text{i}(t) = \begin{cases} 0 \text{ se } t < t_0 \text{ e } t > t_1 \\ 1 \text{ se } t_0 \leq t \leq t_1 \end{cases} \quad (3)$$

Então, para $t < t_0$ ou $t > t_1$ a equação (5) torna-se:

$$\frac{dx_i}{dt} = -\alpha x_i \quad (4)$$

e para $t_0 \leq t \leq t_1$ ela é:

$$\frac{dx_i}{dt} = -\alpha x_i + k_1(k_2 - x_i). \quad (5)$$

A solução da equação (4) é do tipo $x_i(t) = Ae^{-\alpha t}$, onde A é uma constante determinada pelas condições iniciais do problema. Supondo que o valor de x_i é nulo antes de t_0, a solução final da equação (4) é:

$$x_i(t) = \begin{cases} 0 \text{ para } t < t_0 \\ x_i(t_1)e^{-\alpha(t-t_1)} \text{ para } t > t_1 \end{cases}, \quad (6)$$

ou seja, antes da apresentação do CS_i a atividade da unidade sensorial que o representa é nula e depois que o CS_i é retirado esta atividade decai exponencialmente com taxa α para zero.

A equação (5) pode ser resolvida com o uso de uma variável auxiliar,

$$\xi \equiv -(\alpha + k_1)x_i + k_1k_2.$$

Substituindo a variável ξ na equação (5), obtém-se uma equação formalmente similar à equação (4),

$$\frac{d\xi}{dt} = -(\alpha + k_1)\xi,$$

cuja solução é

$$\xi(t) = \xi(t_0)e^{-(\alpha+k_1)(t-t_0)}.$$

Retornando à variável original x_i, tem-se que a solução para a equação (5) é:

$$x_i(t) = \frac{k_1k_2}{\alpha + k_1}\left[1 - e^{-(\alpha+k_1)(t-t_0)}\right] + x_i(t_0)e^{-(\alpha+k_1)(t-t_0)}.$$

No instante $t = t_0$ esta solução tem que ser numericamente igual à dada pela solução da equação (4). Isto implica que $x_i(t_0) = 0$ e a solução final para $t_0 \leq t \leq t_1$ é:

$$x_i(t) = \frac{k_1k_2}{\alpha + k_1}\left[1 - e^{-(\alpha+k_1)(t-t_0)}\right] \quad (\text{para } t_0 \leq t \leq t_1). \quad (7)$$

Esta equação diz que a atividade da unidade sensorial que representa o CS_i cresce exponencialmente, com taxa $(\alpha + k_1)$, em direção ao valor assintótico $k_1k_2/(\alpha + k_1)$ enquanto o CS_i estiver presente.

O comportamento das atividades das unidades sensoriais que representam o US e o CS_i é ilustrado pela Figura 2.

A atividade x_i costuma ser interpretada pelos modelos conexionistas em psicologia (Schmajuk, 1997a) como o traço de memória de curta duração que representa o estímulo CS_i.

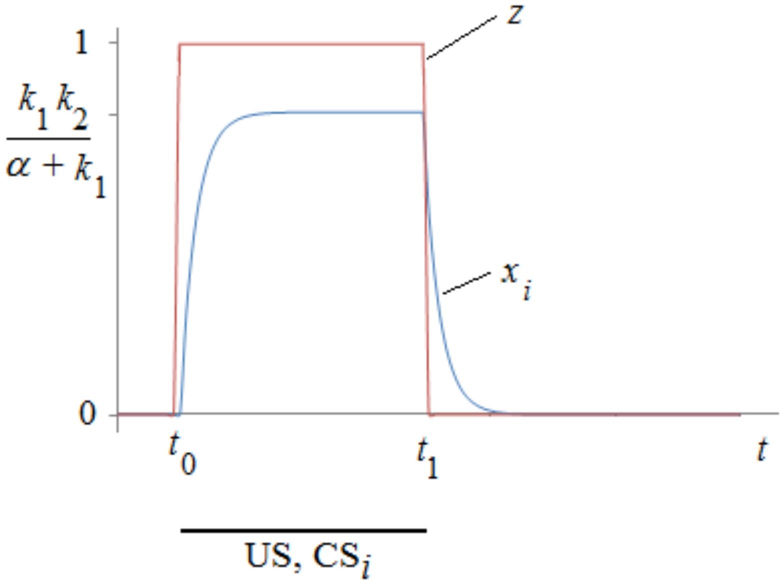

Figura 2. Comportamento temporal das atividades das unidades sensoriais do modelo. Considera-se que o US e o CS_i são apresentados concomitantemente, no intervalo de tempo entre t_0 e t_1 (representados pela linha reta abaixo do gráfico). Instantaneamente após o início do US a atividade z assume o valor 1 e permanece com este valor até o término do US, quando z cai instantaneamente também para 0. O comportamento de x_i não é instantâneo, mas cresce no tempo de forma exponencial com uma taxa determinada por $(\alpha + k_1)$. Após atingir o valor assintótico $k_1k_2/(\alpha + k_1)$, x_i permanece com este valor até o término do CS_i, decaindo exponencialmente para zero com taxa α depois disso. O valor assintótico $k_1k_2/(\alpha + k_1)$ pode ser maior, menor, ou igual a1, dependendo dos valores das constantes k_1, k_2 e α . Na figura ele foi colocado como menor que 1 apenas por razões ilustrativas.

O nível de ativação y da unidade adaptativa pode ser modelado pela equação:

$$\frac{dy}{dt} = -\beta y + k_3(k_4 - y)\left(\sum_{i=1}^{3} v_i x_1 + \lambda z\right), \tag{8}$$

onde β é a taxa de variação de y na ausência de estimulos e k_3 e k_4 são constantes.

Esta é uma equação não-linear, pois envolve o conhecimento das variáveis x_i, v_i e z e, portanto, só pode ser resolvida analíticamente em casos muito especiais. Por exemplo, se a soma total das entradas recebidas pela unidade adaptativa ($\Sigma v_i x_i + \lambda z$) for uma constante positiva, a variável y cresce exponencialmente em direção a uma assíntota determinada por esta constante e por k_3, k_4 e β. No caso geral em que tanto v_i como x_i variarem no tempo (supondo $z = 1$), y cresce quando ($\Sigma v_i x_i + \lambda z$) > 0 e decresce quando ($\Sigma v_i x_i + \lambda z$) < 0.

A saída, ou atividade da unidade adaptativa é uma função f do seu nível de ativação. Em geral, usa-se uma função não-linear com saturação (com assíntota igual a 1) como esta função. Um exemplo é (Schmajuk, 1997):

$$f(y) = \frac{y^p}{y^p + A^p}, \tag{9}$$

onde p é uma constante que determina a inclinição da função e A é uma constante que determina o valor de y para o qual $f(y)$ atinge metade do seu valor assintótico. Um gráfico dessa função está mostrado na Figura 3.

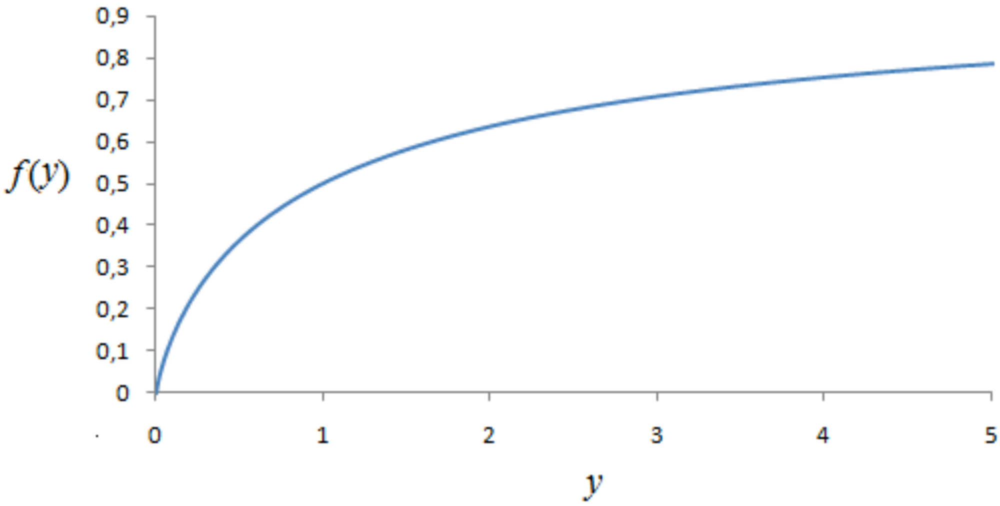

Figura 3. Gráfico da função $f(y)$ dada pela equação (3). Os valores das constantes usados para o gráfico foram p = 0,8 e A = 1.

Com relação à equação que descreve a variação temporal de v_i, a força da conexão entre a unidade sensorial que representa o CS_i e a unidade adaptativa, ela pode ser modelada de diferentes maneiras. Uma possibilidade é modelá-la para que implemente lei de Hebb. A implementação matemática da lei de Hebb é a seguinte:

$$\frac{dv_i}{dt} = -\gamma v_i + \theta x_i f(y), \tag{10}$$

onde γ e θ são constantes: γ é a taxa de variação da força associativa e θ é uma constante de proporcionalidade. Supõe-se que $\gamma << \alpha, \beta$, indicando que a variação temporal dos pesos sinápticos é muito mais lenta que a variação temporal das atividades das unidades da rede (por analogia com as variações temporais das eficácias sinápticas e das atividades neuronais no cérebro).

Segundo a equação (10), sempre que a unidade que representa o estímulo CS_i e a unidade adaptativa estiverem ativas ao mesmo tempo a força da sinapse entre elas cresce proporcionalmente ao produto das suas atividades. Já quando uma das duas unidades, ou as duas, não estiver ativa, o peso sináptico decai exponencialmente com uma taxa γ.

Outra maneira de modelar a variação temporal da força sináptica v_i é pela seguinte versão para tempo contínuo da equação de Rescorla-Wagner vista na aula 7:

$$\frac{dv_i}{dt} = -\gamma v_i + \theta_i x_i \left[\lambda z(t) - \sum_{j=1}^{n} v_j(t) x_j(t) \right]. \tag{11}$$

Nesta equação, γ é a taxa de variação das forças associativas e θ é uma constante de proporcionalidade. Assim como no caso da equação (10), supõe-se que $\gamma << \alpha, \beta$. A interpretação desta equação é a mesma feita para a equação (2) da aula 7.

A intensidade do US "percebida" pela unidade adaptativa é λz e a intensidade "prevista" é dada pela soma das intensidades instantâneas dos CSs presentes ponderada pelas respectivas forças de associação com o US, $\Sigma_j v_j(t) x_j(t)$.

Para ilustrar o efeito da equação (11), uma situação como a da Figura 1 foi simulada, porém com apenas dois CSs (CS_1 e CS_2). As equações usadas foram as equações (1), (2), (3), (8), (9) e (11). O protocolo simulado foi similar ao da descrição do efeito de bloqueio visto na aula 7. Os valores iniciais das atividades das unidades e das forças das conexões do modelo eram todos nulos. Então, o CS_1 e o US foram aplicados conjuntamente em 10 repetições de 20 unidades de tempo cada. Em seguida, por mais 10 repetições de 20 unidades de tempo, o CS_1, o CS_2 e o US foram aplicados de forma pareada. Posteriormente, apenas o CS_2 foi aplicado por 20 unidades de tempo e, depois, apenas o CS_1 por 20 unidades de tempo. Os resultados estão mostrados nas Figuras 4 e 5. Os valores das constantes usadas para a solução numérica das equações são os seguintes: $\alpha = 0{,}3$; $\beta = 0{,}3$; $\gamma = 0{,}0001$; $\lambda = 0{,}1$; $\theta = 0{,}1$; $k_1 = 0{,}1$; $k_2 = 1$; $k_3 = 0{,}5$; $k_4 = 1$; $p = 0{,}4$; $A = 0{,}5$.

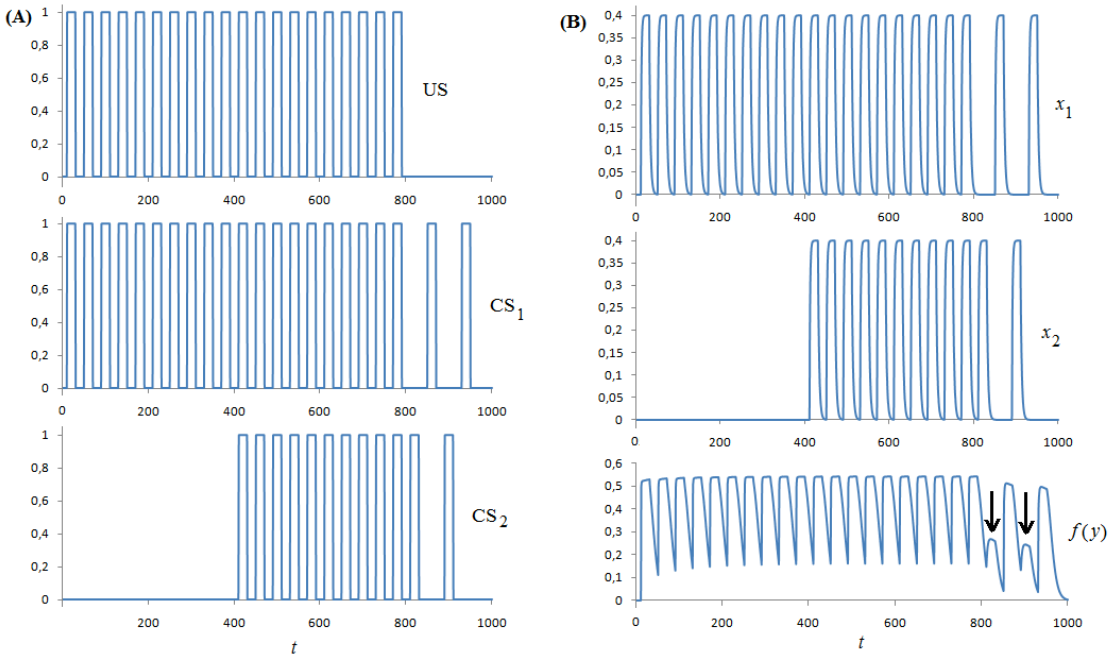

Figura 4. Valores dos estímulos usados na simulação descrita no texto e das correspondentes atividades das três unidades da rede (duas sensoriais e uma adaptativa). Na primeira parte do experimento simulado, o US e o CS_1 são aplicados de forma pareada por 10 ensaios de 20 unidades (arbitrárias) de tempo. Na segunda parte, o US, o CS_1 e o CS_2 são aplicados de forma pareada por 10 ensaios de 20 unidades de tempo. Na terceira parte, o CS_2 e o CS_1 são aplicados isoladamente e de forma intercalada por 2 vezes por 20 unidades de tempo cada. Este procedimento está

indicado pela parte (A) da figura. Na parte (B) estão mostradas as atividades das duas unidades sensoriais (x_1 e x_2) e da unidade adaptativa ($f(y)$). Observe a redução na resposta da unidade adaptativa quando o CS_2 é aplicado isoladamente (indicada por setas), em comparação com a forte resposta da unidade quando o CS_1 é aplicado isoladamente. Isto indica que o fenômeno de bloqueio foi capturado pelo modelo.

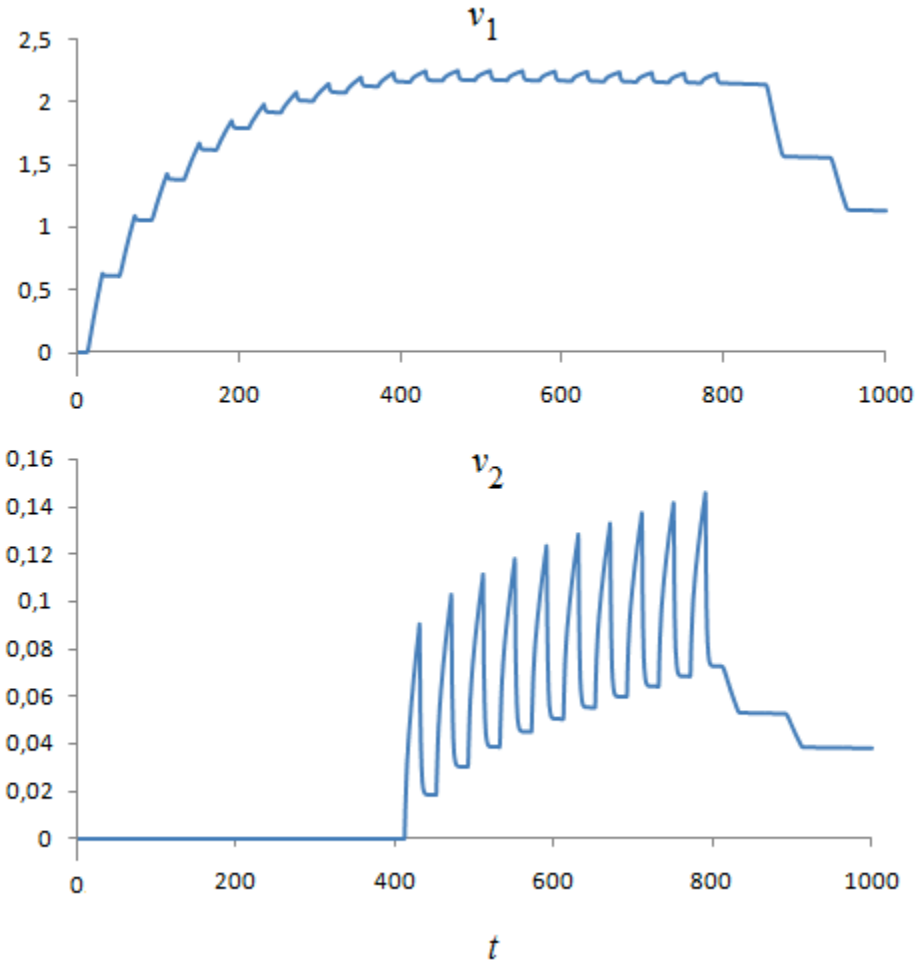

Figura 5. Comportamento temporal das forças das conexões do modelo descrito no texto para o protocolo descrito na Figura 4. Observe a diferença de escala entre os dois gráficos. A força da conexão entre a unidade que representa o CS_1 e a unidade adaptativa cresce para valores muito maiores que a força da conexão entre a unidade que representa a força da conexão entre o CS_2 e a unidade adaptativa.

As equações mostradas acima constituem as equações básicas para a construção de modelos mais complexos para aprendizado de animais (ver, por exemplo, o livro de

Schmajuk, N. A., *Animal Learning and Cognition: a neural network approach*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1997).